ELETTROTECNICA

ESERCIZI

DI

AULE VIRTUALI

STAZIONARIO

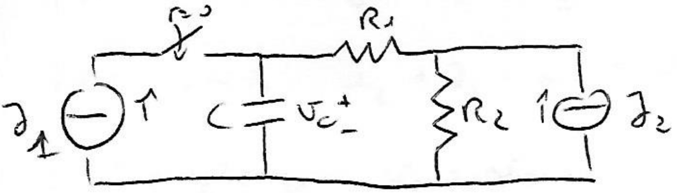
I° ordine

e

II° ordine

Prova del 17.01.2012 Esercizio 1

I° ordine
$v_C = ?$



$J_1 = 10\ A$

$J_2 = 24\ A$

$R_1 = 8\ \Omega$

$R_2 = 12\ \Omega$

$C = 1\ mF = 10^{-3}\ F$

$v_C(t)\ \forall t$
da determinare

---

1) Analisi del circuito prima dell'istante di commutazione
$t<0$: il condensatore si comporta come un circuito aperto perché il circuito è a regime stazionario.

$v_C = v_2$ perché in parallelo

$v_2 = v_J$

$v_J = R_{eq} \cdot J$

$R_{eq} = R_1 + R_2 = 20\ \Omega$ perché in serie

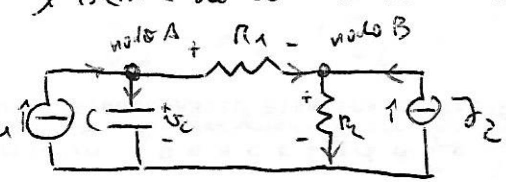
$\Downarrow$

$v_J = 20 \cdot 10 = 200\ V$

2) Determinazione di v_C nell'istante di commutazione

$v_C(0) = 200\ V$

3) Determinazione della eq. differenziale che regola v_C dopo l'istante di commutazione.



LKC nodo A: $J_1 - i_C - i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = J_1 - i_C$

LKC nodo B: $i_1 + J_2 - i_2 = 0$

LKT maglia sx: $v_{J_1} = v_C$

cn: $v_1 + v_2 - v_C = 0 \Rightarrow i_1 R_1 + i_2 R_2 - v_C = 0$

dx: $v_2 = v_{J2} \Rightarrow i_2 R_2 = v_{J2}$

dalla LKC nodo A ricavo i_1 e sostituisco nella LKC nodo B:

(1) $$J_1 - \underbrace{i_C}_{C\frac{dv_C}{dt}} + J_2 - i_2 = 0$$

dalla LKT maglia cn, sostituendo le caratteristiche dei bipoli, ricavo i_2, con i_1 sostituito dalla equazione precedente:

$$(J_1 - i_C) R_1 + i_2 R_2 - v_C = 0 \Rightarrow$$

$$i_2 = \frac{v_C - (J_1 - i_C) R_1}{R_2} \quad \text{e}$$

sostituisco questa nella (1)

$$J_1 - i_C + J_2 - \frac{v_C - (J_1 - i_C) R_1}{R_2} = 0$$

e, essendo $i_C = C\frac{dv_C}{dt}$ ottengo

$$J_1 - C\frac{dv_C}{dt} + J_2 - \frac{v_C}{R_2} + J_1\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1}{R_2}C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

da cui

$$C\frac{dv_c}{dt} + \frac{R_1}{R_2}C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R_2} = J_1 + J_2 + J_1\frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{dv_c}{dt}\underbrace{\left(C+\frac{R_1}{R_2}\right)}_{\frac{R_2C+R_1}{R_2}} + \frac{1}{R_2}v_c = \frac{R_2J_1 + R_2J_2 + J_1R_1}{R_2}$$

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R_2C+R_1}v_c = \frac{R_2J_1+R_2J_2+R_1J_1}{R_2C+R_1}$$

4) omogenea associata

$$\lambda + \frac{1}{R_2C+R_1} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{R_2C+R_1} = -\frac{1}{\frac{12}{1000}+\frac{800}{100}}$$

$$+\frac{1}{6} \qquad = -\frac{1000}{8012} = -0{,}12$$

$$v_{co}(t) = Ke^{-0{,}12t}$$

5) integrale particolare:

$$v_{cp}(t) = R_2J_1 + R_2J_2 + R_1J_1 = 12\cdot 10 + 12\cdot 25 + 8\cdot 10 = 488$$

6) Soluzione completa $v_c(t) = v_{co}(t) + v_{cp}(t)$

$$v_c(t) = Ke^{-0{,}12t} + 488$$

7) Impongo condizioni iniziali:

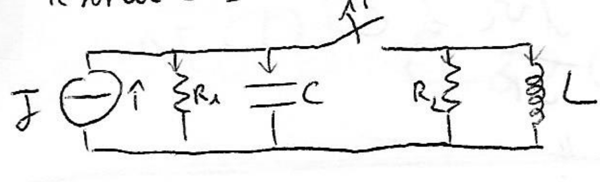
$v_c(t) = Ke^{-0{,}12t} + 488 \Rightarrow K = -288$, per cui:

$v_c(0) = 200$

$$v_c(t) = \begin{cases} 200 & t<0 \\ -288e^{-0{,}12t} + 488 & t>0 \end{cases}$$

Prova 14.12.2011 Aula N. 11.2

Esercizio 1



$J = 10\,A$

$R_1 = 8\,\Omega$

$R_2 = 10\,\Omega$

$L = 2\,mH = 2 \cdot 10^{-3}\,H$

$C = 500\,\mu F = 500 \cdot 10^{-6}\,F$

$\boxed{I^\circ \text{ ord}}$

$v_C = ?$ e i_L

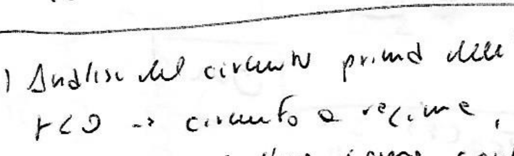
$v_C(t)\ \forall t$ da determinare

partendo $i_L(t)\ \forall t$

---

1) Analisi del circuito prima dell'istante di commutazione, $t<0$ → circuito a regime, condensatore come c.a. e induttore come corto circuito. considerazioni determinate

$\boxed{\text{In } R_1 \text{ e } R_2 \text{ non passa corrente, } J \text{ circola tutta nella maglia esterna}}$



~~v_C è $v_1 = v_J$ la Req del circuito è $R_1 // R_2$:~~ ~~$\frac{R_1+R_2}{R_1 \cdot R_2} = \frac{18}{80} = 0,225\,\Omega$~~

~~$v_J = J \cdot R_{eq} = 10 \cdot 0,225 = 2,25\,V$~~

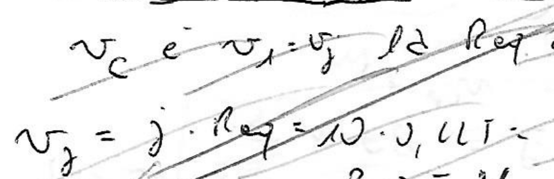
$v_C(t) = 0$

$i_L(t) = J$

⇓

2) $v_C(0) = \cancel{2,25\,V} = 0\ ;\ i_L(0) = J = 10\,A$

3) Determinare eq. differenziale in v_C dopo l'istante di commutazione



LKC nodo A: $J - i_1 - i_C = 0$

$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_C}{R_1}$

$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$

LKT sx : $V_j = v_1$

LKT dx : $v_1 = v_C$

Quindi

$$J - \frac{v_C}{R_1} - C\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ i_1 & i_C \end{array}$$

$$\boxed{\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_1 C} = \frac{J}{C}}$$

$\boxed{\text{OK}}$

4) Omogenea associata $v_{CO}(t)$

$$\lambda + \frac{1}{R_1 C} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{R_1 C} = -\frac{1}{8 \cdot 500 \cdot \frac{1}{10^6}} = -\frac{10^6}{400} = 250$$

$$\Downarrow$$

$$v_{CO}(t) = K_1 e^{-250t}$$

5) Integrale particolare $v_{cp}(t)$

$$v_{cp}(t) = R_1 J = 80\ V$$

6) Soluzione completa $v_C(t) = v_{CO}(t) + v_{cp}(t)$

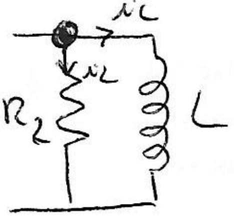
7) Imposizione condizioni iniziali per determinare K_1

$$\begin{cases} v_C(t) = K_1 e^{-250t} + 80 \\ v_C(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow K_1 = -80$$

Quindi

$$v_C(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ -80\, e^{-250t} + 80 & t>0 \end{cases}$$

Facoltativo: nella maglia con R_2 e l'induttore non c'è forzamento



$$\left.\begin{aligned} v_2 - v_L &= 0 \\ v_2 = i_2 \cdot R_2, \quad i_2 &= i_L, \quad v_L = L\frac{di_L}{dt} \end{aligned}\right\} \text{CKT} \Rightarrow i_2 = \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt}$$

CKT

$$\underbrace{-i_2 - i_L}_{\text{niente di ©}} = 0$$

$$\boxed{\frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = 0$$

$$\lambda = -\frac{R_2}{L} = -\frac{10}{2} \cdot 10^3 = -5000$$

$$\cancel{\begin{cases} \frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = 0 \\ i_L(0) = 10 \end{cases}}$$ ~~non c'è forzamento~~

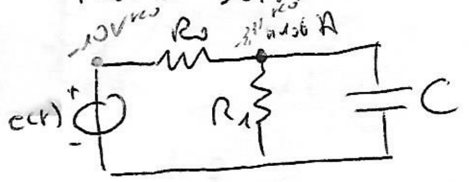
$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} i_{L0}(t) &= k_1 \cdot e^{-5000t} \\ i_{LP}(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} i_L(t) = k_1\, e^{-5000t} \\ i_L(0) = 10 \end{cases}$$

$$k_1 = 10$$

$$i_L(t) = \begin{cases} 10 & t<0 \\ 10\, e^{-5000t} & t>0 \end{cases}$$

Prova 30.11.2011 Es. 1 - Auto valutaz. ...



$$e(t) = \begin{cases} -10\,V & t<0 \\ +10\,V & t>0 \end{cases}$$

I° ordine

$v_C = ?$

$R_0 = 12\ \Omega$

$R_1 = 6\ \Omega$

$C = 250\ \mu F = 250 \cdot 10^{-6}\ F$

---

1) Analisi del circuito prima dell'istante di commutazione $t<0$ => il circuito è a regime stazionario => il condensatore si comporta come un circuito aperto. R_{eq} del circ $= 18\ \Omega$ La tensione su $R_1 = v_C = E \cdot \frac{R_1}{R_{eq}} = -3{,}33$

~~$v_C(t) = e(t) = -10\,V$~~

2) Determinare variabili di stato nell'istante di commutazione

$v(0) = -3{,}33\,V$ per la continuità delle variabili di stato

3) Determinare l'eq. differenziale che regola l'andamento di v_C dopo l'istante di commutazione

LKC nodo A: $i_0 - i_1 - i_C = 0 \Rightarrow i_0 = i_1 + i_C$, $i_C = C\frac{dv_C}{dt}$

LKT maglia sx $v_0 + v_1 = E$

LKT maglia dx $v_1 = v_C$

$\Rightarrow v_0 + v_C = E$

$v_0 = i_0 \cdot R_0 = (i_1 + i_C) \cdot R_0$

$v_1 = i_1 R_1 = v_C \Rightarrow i_1 = \frac{v_C}{R_1}$

$$\boxed{\left(\frac{v_C}{R_1} + i_C\right) \cdot R_0} = v_0$$

$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$

Quindi $v_0 + v_C = E$ =>

$$R_0 \frac{v_C}{R_1} + R_0 C \frac{dv_C}{dt} + v_C = E$$

$$\frac{R_0}{R} + 1$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{R_0 C}\left(\frac{R_0}{R_1} + 1\right) v_C = \frac{E}{R_0 C}$$

$$\cancel{\frac{dv_C}{dt}} \quad \frac{dv_C}{dt} + \frac{R_0+R_1}{R_0R_1C}v_C = \frac{E}{R_0C}$$

$\cancel{dt}$

4) Omogenea associata $v_{C0}(t)$

$$\lambda + \frac{R_0+R_1}{R_0R_1C}\cancel{\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{R_0+R_1}{R_0 \cdot R_1 C} = -\frac{18}{72 \cdot \frac{250}{10^6}} = -\frac{18 \cdot 10^6}{72 \cdot 250}$$

$$= -1000$$

$$\Downarrow$$

$$v_{C0}(t) = K_1 e^{-1000t}$$

5) Integrale particolare $v_{Cp}(t)$

$$v_{Cp}(t) = \frac{E}{R_0 \cancel{C}} \cdot \frac{R_0 R_1 \cancel{C}}{R_0+R_1} = \frac{E R_1}{R_0+R_1} = \frac{10 \cdot 6}{18} = 3{,}33$$

6) Soluzione completa $v_C(t) = v_{C0}(t) + v_{Cp}(t)$

7) Imponiamo condizioni iniziali per determinare K_1 e K_2

$$\begin{cases} v_C(t) = K_1 e^{-1000t} + 3{,}33 \\ v_C(0) = -3{,}33 \end{cases} \Rightarrow K_1 = -6{,}66$$

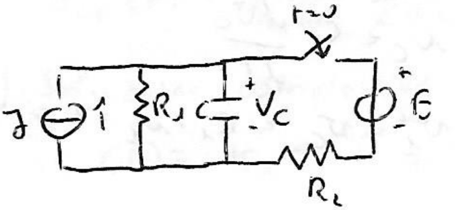
Quindi

$$v_C(t) = \begin{cases} -3{,}33\,V & t<0 \\ -6{,}66\, e^{-1000t} + 3{,}33 & t>0 \end{cases}$$

da Aule Virtuale 20.1

PROVA DEL 13.01.2012 ESERCIZIO 1 I^o ordine

$v_C = ?$



$J = 10\,A$
$E = 60\,V$
$R_1 = 8\,\Omega$
$R_2 = 12\,\Omega$
$C = 500\,\mu F = 500 \cdot \frac{1}{10^6} F$

$v_C \ \forall t$
da determinare

1) Analisi del circuito prima dell'istante di commutazione.

Il circuito è a regime stazionario, il condensatore si comporta come un circuito aperto.

$v_C = v_1 = v_J$

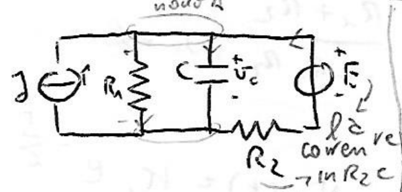
La resistenza equivalente del circuito è R_1, quindi

$v_J = R_1 \cdot J = 80\,V$

2) Per la continuità delle variabili di stato

$v_C(0^-) = v_C(0) = 80\,V$ (condizione iniziale)

3) Determinare l'equazione differenziale che regola l'andamento di v_C dopo l'istante di commutazione.



la corrente in R_2 e E è la stessa!!!

n.b.: il parallelo tra R_1 e C può essere considerato un unico nodo (su spiegazioni).

CONSIDERAZIONE IMPORTANTE e SEMPLIFICATIVA di alcuni risoluzioni, considerando due nodi, che corrente avremmo (cioè ripartizione) da R_1 verso C? UN UNICO NODO è come

nodo A, LKC:

$J - i_1 - i_C - i_E = 0$

LKT alla maglia dx:

$$R_2 i_E + v_C = E$$

caratteristiche dei bipoli: $i_C = C\frac{dv_C}{dt}$

$$v_1 = v_C = R_1 \cdot i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{v_C}{R_1}$$

Quindi abbiamo:

dalla LKC nodo 1:

$$\underbrace{\frac{v_c}{R_1}}_{i_1} + \underbrace{C\frac{dv_c}{dt}}_{i_C} = J + \underbrace{\frac{E}{R_2} - \frac{v_c}{R_2}}_{i_E}$$

ovvero

$$C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R_1} + \frac{v_c}{R_2} = J + \frac{E}{R_2}$$

(si deve moltiplicare dividere per C)

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{C}\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \left(J + \frac{E}{R_2}\right)\frac{1}{C}$$ ovvero

$$\boxed{\frac{dv_C}{dt} + \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}v_C = \frac{JR_2+E}{CR_2}}$$

4) omogenea associata

$$\lambda + \frac{R_1+R_2}{CR_1R_2} = 0 \Rightarrow \lambda = \boxed{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}} = -\frac{1}{\tau}$$ di valore $\simeq -4.7$

quindi

$v_{C0}(t) = K_1 e^{-4.7t}$ cioè $v_{C0}(t) = K_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$

5) Integrale particolare

$$v_{cp}(t) = \frac{\cancel{C} R_1 R_2}{R_1+R_2} \frac{(J R_2 + E)}{\cancel{C} R_2} = \frac{R_1 (J R_2 + E)}{R_1 + R_2} = 72 \text{ V}$$

6) Soluzione complessiva $v_c(t) = v_{co}(t) + v_{cp}(t)$

$$v_c(t) = K_1 e^{-417t} + 72$$

7) Imposizione della condizione iniziale per determinare la costante di integrazione K_1:

$$\begin{cases} v_c(t) = K_1 e^{-417t} + 72 \\ v_c(0) = 80 \end{cases}$$

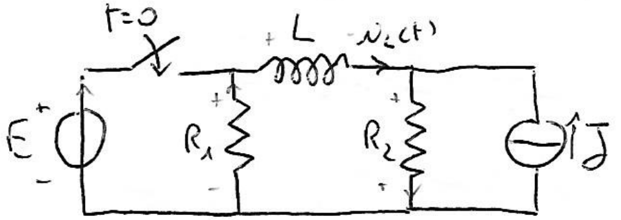
si ottiene $K_1 = 8$, quindi, infine abbiamo:

$$v_c(t) = \begin{cases} 80 \text{ V} & \text{per } t<0 \\ 8 e^{-417t} + 72 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

da Aula Virtuale 20

PROVA del 16.01.2012

I° ordine



i_L ?

$J = 20\,A$

$E = 100\,V$

$R_1 = 10\,\Omega$

$R_2 = 10\,\Omega$

$L = 10\,mH = 10^{-2}H$

$i_L \ \forall t$

da determinare

1) Analisi del circuito prima dell'istante di commutazione

Il circuito è a regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito.

La corrente i_L è la stessa corrente di R_1 che si determina con un partitore di corrente:

$$i_L(t) = -J \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = -10\,A$$

$\quad \shortparallel \qquad$ (verso opposto)

$\quad i_1$

2) Per la continuità delle variabili di stato

$i_L(0^-) = i_L(0^+) = -10\,A$ (condizione iniziale)

3) Determinazione della equazione differenziale che regola l'andamento di i_L dopo l'istante di commutazione

[vd. Punto 3 calcolo] da cui l'equazione è:

$$\frac{d i_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = \frac{E - R_2 J}{L}$$

../..

Quindi
$$\boxed{\frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = \frac{E - R_2 J}{L}}$$

4) Omogenea associata $\quad \dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{R_2}{L} i_L = 0$

$$\lambda + \frac{R_2}{L} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R_2}{L} = -1000$$

$$-\frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{1000} \text{ sec}$$

da cui

$$i_{LO}(t) = K_1 e^{-1000t}$$

5) Integrale particolare

$$i_{LP}(t) = \frac{E - R_2 J}{R_2} = \frac{100 - 200}{10} = -10 \text{ A}$$

6) Soluzione complessiva $\quad i_L(t) = i_{LO}(t) + i_{LP}(t)$

$$i_L(t) = K_1 e^{-1000t} - 10$$

7) Imposizione condizione iniziale per determinare K_1:

$$\begin{cases} i_L(t) = K_1 e^{-1000t} - 10 \\ i_L(0) = -10 \end{cases} \Rightarrow K_1 = 0$$

Da cui la soluzione finale

$$i_L(t) = -10 \text{ A} \quad \forall t$$

LA COMMUTAZIONE NON PORTA A NESSUNA DINAMICA ALL'INTERNO DEL CIRCUITO.
Nella rete non succede nulla perché il generatore E assorbe potenza, ed in particolare proprio la stessa potenza che assorbiva R_1 prima della chiusura dell'interruttore

LKT

sx : $v_1 = E$

cn : $\cancel{v_1} -E + v_L + v_2 = 0$

dx : $v_2 = v_J$

$\left.\right\}$ come se R_1 non ci fosse

calcoli

$$\boxed{\begin{aligned} v_L &= L\frac{di_L}{dt} \\ v_2 &= i_2 R_2 \end{aligned}}$$

LKC nodo L-R_2-J : $i_L - i_2 + J = 0 \Rightarrow i_2 = i_L + J$ (1° step elimino i_2)

$\Rightarrow v_2 = R_2(i_L + J) \overset{\text{2° step elimino } v_2}{\Longrightarrow}$

3° step sostituisco v_2 nella LKT cn = centrale, con

$v_L = L\frac{di_L}{dt}$

$$L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L + \cancel{R_2 J} = E - R_2 J$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = \frac{E - R_2 J}{L}$$

Aula Virtuale 21

Esercizio 1

$$e(t) = \begin{cases} 10\,V & t<0 \\ 20\,V & t>0 \end{cases}$$ II° ordine

$i_C = ?$

$R = 2\ \Omega$

$L = 4\ mH = 4 \cdot 10^{-3}\ H$

$C = 0{,}5\ mF = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}\ F$

per $t<0$ la rete è a regime

$i_L(t)\ \forall t$ da determinare

(come possibili ordinari ordinari?)

1) Analizzo circuito prima dell'istante di commutazione. $t<0$ => rete a regime => L si comporta come cortocircuito, C si comporta come circuito aperto. Quindi $i_L = i_R$ è l'unica corrente che circola nell'unica maglia e quindi

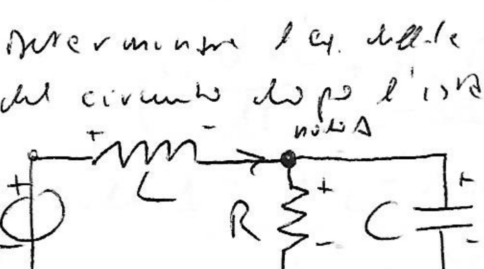
$$i_L(t) = \frac{e(t)}{R} \Rightarrow i_L(0^-) = \frac{10\,V}{2\,\Omega} = 5\,A$$

2) Condizioni iniziali

$i_L(0) = 5\,A$

$v_C(0) = e(t) = 10\,V$ ($= v_R$) perché R e C sono in // col generatore di tensione

3) Determiniamo l'eq. differenziale che regola l'andamento del circuito dopo l'istante di commutazione



(devono essere eliminate dalle equazioni le variabili non di stato)

LKT dx $v_C = v_R$

LKT sx $v_L + v_R = e(t)$

LKC nodo A: $i_L - i_R - i_C = 0$

$v_L = L \frac{di_L}{dt}$ $\quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}$

- Determinare quali sono le incognite ed eliminare quelle che non sono variabili di stato.

Esprimere v_L con $L\frac{di_L}{dt}$

e i_C con $C\frac{dv_C}{dt}$

e $v_R = i_R \cdot R$

LKT dx: $\boxed{v_C = v_R = i_R R}$

LKT sx: $v_L + v_R = e(t)$, quindi

$$\boxed{L\frac{di_L}{dt} + \underbrace{i_R R}_{v_C} = e(t)}$$

LKC nodo 1: $i_L - i_R - i_C = 0$, quindi

$$\boxed{i_L - \frac{v_C}{R} - C\frac{dv_C}{dt} = 0}$$

Quindi con le due equazioni

$$\left.\begin{aligned} & L\frac{di_L}{dt} + v_C = e(t) \\ e\quad & i_L - \frac{v_C}{R} - C\frac{dv_C}{dt} = 0 \end{aligned}\right\}$$ incognite i_L e v_C, i_R è stata tolta

otteniamo l'equazione finale.
Dalla PRIMA RICAVIAMO v_C e sostituiamo nella seconda, ottenendo una equazione differenziale solo in i_L.

$$v_C = e(t) - L\frac{di_L}{dt} \quad e$$

quindi:

$$i_L - \frac{e(t)}{R} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + $$

$$- C\left(\frac{de(t)}{dt} - L\frac{d^2 i_L}{dt^2}\right) = 0$$

ovvero

$$v_L - \frac{e(t)}{R} + \frac{L}{R}\frac{dv_L}{dt} - C\frac{de(t)}{dt} + LC\frac{d^2 v_L}{dt} = 0$$

$$LC\frac{d^2 v_L}{dt} + \frac{L}{R}\frac{dv_L}{dt} + v_L = C\frac{de(t)}{dt} + \frac{e(t)}{R}$$

ovvero

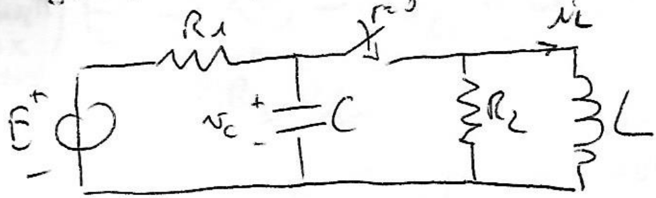
$$\frac{d^2 v_L}{dt} + \frac{1}{RC}\frac{dv_L}{dt} + \frac{1}{LC}v_L = \frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} + \frac{e(t)}{RLC}$$

questo elemento è un più rispetto alla A.L.

Però il suo valore è zero in quanto $e(t) = 20 \; \forall t > 0$!

AV 21 Esercizio 2

(II ordine) $i_L = ?$



$E = 90V$

$R_1 = 3\ \Omega$

$R_2 = 6\ \Omega$

$L = 2{,}5\ mH = \frac{2.5}{1000} H$

$C = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1000} F$

$i_L(t)\ \forall t$ da determinare

---

1) Analisi del circuito prima dell'istante di commutazione $t<0$; il circuito è a regime => il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito.
l'interruttore è aperto: non circola corrente

$i_L(t) = 0$

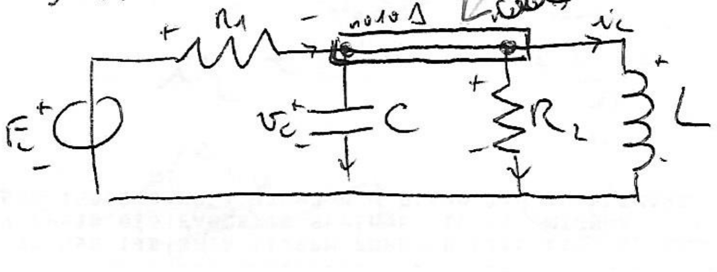
e $v_C(t) = E$

Generatore e condensatore //

considerare un unico nodo!

2) $i_L(0) = 0$ e $v_C(0) = 90V$

3) Determinare l'eq. diff. che regola $i_L(t)$ dopo l'istante di commutazione:



(KT maglia sx) $\underset{R_1 i_1}{\underbrace{E - v_1}} - v_C = 0 \Rightarrow R_1 i_1 = E - v_C$

ricavo i_1 perché non variabile di stato

$$i_1 = \frac{E}{R_1} - \frac{v_C}{R_1}$$

(KT maglia cn e dx) $v_C = \underset{R_2 i_2}{v_2} = \underbrace{L \frac{di_L}{dt}}_{v_L} \Rightarrow i_2 = \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt}$

bipolo in parallelo.

Ricavo i_2 perché non variabile di stato

(KC nodo A) $i_1 - \underbrace{C\frac{dv_C}{dt}}_{i_C} - i_2 - i_L = 0$

$\Downarrow$ sostituiamo i_1 e i_2

$$\overbrace{\frac{E}{R_1} - \frac{1}{R_1}\cdot \underbrace{L\frac{di_L}{dt}}_{v_C = v_2}}^{i_1} - \underbrace{CL\frac{d^2 i_L}{dt^2}}_{C\frac{dv_C}{dt}} - \underbrace{\frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt}}_{i_2} - i_L = 0$$

$\cancel{\left(-CL\frac{d^2 i_L}{dt}\right)}$

$$C\frac{dv_C}{dt} = C\frac{d\left(L\frac{di_L}{dt}\right)}{dt} = CL\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$CL\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{L}{R_1}+\frac{L}{R_2}\right)}_{\frac{R_1 L + R_2 L}{R_1 R_2}}\frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{E}{R_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2 v_C}{dt} + \underbrace{\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}}_{\cancel{9}\cdot\frac{10000}{\cancel{1}82} = 5000}\frac{dv_C}{dt} + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{4\cdot 10^6} v_C = \frac{E}{CLR_1}}$$

$\boxed{\text{OK}}$

4) Omogenea associata $v_{c0}(t)$:

$$\lambda^2 + 5000\lambda + 4\cdot 10^6 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{-5000 \pm \sqrt{5000^2 - 16\cdot 10^6}}{2} =$$

$$= \frac{-5000 \pm \sqrt{9000000}}{2} = \frac{-5000 \pm 3000}{2}$$

quindi

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = -4000\\ \lambda_2 = -1000\end{array}\right\} \Rightarrow v_{c0}(t) = k_1 e^{-4000t} + k_2 e^{-1000t}$$

5) integrale particolare $i_{cp}(t)$

$$i_{cp}(t) = \frac{E}{R_1} = \frac{90}{3} = 30\ A$$

6) condizioni iniziali $\frac{d i_c(0^+)}{dt}$

$$v_C = V_L \Rightarrow V_C = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d i_c(0^+)}{dt} = \frac{v_C(0^+)}{L} = \frac{E}{L} = \frac{90\cdot 1000}{2,5} = 36000\ A/s$$

$$v_C(0^+) = v_C(0^-)$$

7) Soluzione completa $i_c(t) = i_{c0}(t) + i_{cp}(t)$

8) Imposizione condizioni per soluzione finale

$$\begin{cases} i_c(t) = i_{c0}(t) + i_{cp}(t) = K_1 e^{-4000t} + K_2 e^{-1000t} + 30 \\ i_c(0) = 0 \\ \frac{d i_c(0^+)}{dt} = 36000 \end{cases}$$

$$\rightarrow -4000 K_1 e^{-4000t} - 1000 K_2 e^{-1000t}$$

$$K_1 + K_2 + 30 = 0 \Rightarrow K_1 = -K_2 - 30$$

$$-4000 K_1 - 1000 K_2 = 36000 \cancel{\Rightarrow K_2 = -40}$$

$$-4K_1 - K_2 = 36$$

$$4K_2 + 120 - K_2 = 36$$

$$3K_2 = -84 \Rightarrow K_2 = -28$$

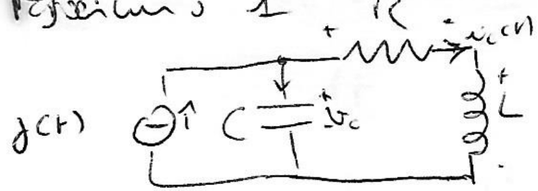
$$\Rightarrow K_1 = -2$$

Quindi per $t>0$:

$$i_c(t) = -2e^{-4000t} - 28e^{-1000t} + 30\ A.$$

Aula virtuale 21.2 Prova del 18.07.2012

Esercizio 1



$$j(t) = \begin{cases} -20\,A & t<0 \\ 20\,A & t>0 \end{cases}$$ NB!

$R = 15\,\Omega$

$L = 5\,mH = 5\cdot 10^{-3}\,H$

$C = 1\,mF = 10^{-3}\,F$

$i_L(t)\ \forall t$ da determinare

---

1) $t<0$

condensatore = c. aperto, induttore = c.c. $\Big\}$ => unica maglia in cui scorre una unica corrente,

$i_L = j = -20\,A$

$v_C = v_j = R\cdot j = -300\,V$

$\Downarrow$

2) $t=0$ continuità delle

$i_L(0) = -20\,A$ $\quad v_C(0) = -300\,V$ OK

3) Det. eq. diff. che regola i_L dopo l'istante di commutazione $t>0$

(LKC) $\quad j - \underbrace{i_C}_{= C\frac{dv_C}{dt}} - i_L = 0$

$v_j = v_C$

(LKT) $\quad \underbrace{v_R}_{= i_L\cdot R} + \underbrace{v_L}_{= L\frac{di_L}{dt}} - v_C = 0 \Rightarrow v_C = v_R + v_L = i_L R + L\frac{di_L}{dt}$, sostituendo nella LKC

$$C\frac{dv_C}{dt} + i_L = j$$

$$C \frac{d\left(v_L R + L \frac{dv_L}{dt}\right)}{dt} + v_C = J$$

$$CR \frac{dv_L}{dt} + LC \frac{d^2 v_L}{dt^2} + v_C = J$$

$$\boxed{\frac{d^2 v_L}{dt} + \frac{R}{L}\frac{dv_L}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot v_C = \frac{J}{LC}}$$

4) omogenea associata

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\frac{15}{5/10^3} = 3000 \qquad \frac{10^6}{5}$$

$$\lambda^2 + 3000\lambda + 200000 = 0$$

$$\lambda_{12} = \frac{-3000 \pm \sqrt{3000^2 - 4 \cdot 200000}}{2} =$$

$$= \frac{-3000 \pm \sqrt{8200000}}{2} = \frac{-3000 \pm 2864}{2}$$

$$v_{C0}(t) = k_1 e^{-4432t} + k_2 e^{-136t}$$

ecc.

Tensione ai capi del condensatore

$$\Downarrow$$

Dalla LKC $\nu_c = j - C\frac{dv_c}{dt}$ e sostituendo nella LKT:

$$R\left(j - C\frac{dv_c}{dt}\right) + L\frac{d\left(j - C\frac{dv_c}{dt}\right)}{dt} - v_c = 0$$

$$Rj - RC\frac{dv_c}{dt} + \cancel{L\frac{dj}{dt}} - LC\frac{d^2v_c}{dt} - v_c = 0$$

J costante

$$LC\frac{d^2v_c}{dt} + RC\frac{dv_c}{dt} + v_c = Rj$$

$$\boxed{\frac{d^2v_c}{dt} + \frac{R}{L}\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{LC}v_c = \frac{R}{LC}j}$$

4) Omogenea

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

...

$$v_{c0}(t) = K_1 e^{-4432t} + K_2 e^{-216t}$$

5) Integrale particolare:

$v_{cp}(t) = Rj$ (di [illegible])

6) Soluzione completa $v_c(t) = v_{c0}(t) + v_{cp}(t)$

$$v_c(t) = k_1 e^{-4432t} + k_2 e^{-216t} + Rj$$

7) Seconda condizione iniziale $\frac{dv_c(0^+)}{dt} = ?$

Dalla LKC $\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}\left(j(t) - \nu_c(t)\right)$, a $t = 0^+$

$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{1}{C}(20 + 20) = \frac{40}{\ldots}$ 4000V

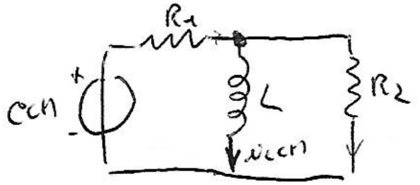
Aula virtuale 4.3 (4° ora)

TRANSITORI CON PIÙ COMMUTAZIONI

Prova del 3 ottobre 2013. Esercizio 1

Il generatore di tensione è spento per $t<0$. Si accende nell'istante 0 e si rispegne nell'istante T.

Determinare $i_L(t)$ in ogni istante



$$e(t) = \begin{cases} 0\,V & t<0 \\ 8\,V & 0<t<T \\ 0\,V & t>T \end{cases}$$

$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$L = 1\ mH$
$T = 20\ ms$

1) $t<0$. Rete in regime stazionario, l'induttore si comporta come un corto circuito

$$i_L(t) = \frac{e(t)}{R_1} = 0\ A$$

2) $i_L(0^+) = 0\ A$

3) $0<t<T$. Determinazione delle eq. diff. che regolano $i_L(t)$.

LKT maglia sx) $\quad e(t) - R_1 i_1 - v_L = 0$

LC $\quad i_1 - i_L - i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_L + i_2$

LKT maglia dx $\quad v_L = v_2 \Rightarrow L\frac{di_L}{dt} = R_2 i_2 \Rightarrow$

$$i_2 = \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt}$$

 ../..

quindi $i_1 = i_L + \frac{L}{R_2}\frac{di_L}{dt}$ e quindi

$$e(t) - R_1 i_L - \frac{R_1 L}{R_2}\frac{di_L}{dt} - L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{R_1 L + R_2 L}{R_2}\right)\frac{di_L}{dt} + R_1 i_L = e(t)$$ ovvero

$$\boxed{\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 R_2}{R_1 L + R_2 L} i_L = \frac{R_2}{R_1 L + R_2 L} e(t)}$$

4) Omogenea $\lambda + \frac{R_1 R_2}{R_1 L + R_2 L} = 0 \Rightarrow \lambda = -1000$ quindi

$$i_{Lo}(t) = k e^{-1000t}$$

5) Soluzione particolare $i_{Lp}(t) = \frac{e(t)}{R_1} = 4A$

6) Soluzione complessiva $i_L(t) = i_{Lo}(t) + i_{Lp}(t)$

7) Imponiamo condizioni iniziali
$$\begin{cases} i_L(t) = k e^{-1000t} + 4 \\ i_L(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow k = -4$$

quindi $i_L(t) = -4e^{-1000t} + 4$ per $0 < t < T$

$i_L(0) = 0$

ORA DOBBIAMO STUDIARE UN ALTRO TRANSITORIO PARTENDO DALLA SITUAZIONE ATTUALE

Analisi della rete per $t > T$

$$i_L(T^-) = -4e^{-1000T} + 4 \simeq 4A \quad \text{con } T = 20ms$$

.. /

Quindi:

$$v_L(T^-) = v_C(T^+) = 4\,1$$ → nuove condizioni iniziali

3) L'eq. della C è la stessa

4) L'omogenea è la stessa $\quad v_{co}(t) = k e^{-\omega_0 t}$

5) L'integrale particolare è da calcolare

$$v_{cp}(t) = \frac{e(t)}{R_1} = 0 \quad \text{perché } e(t) = 0$$

6) Soluzione complessiva

7) Condiz. iniziali
$$\begin{cases} v_C(t) = v_{co} + v_{cp} = k e^{-\omega_0 t} \\ v_C(T) = 4 \end{cases}$$

da cui $K = \cancel{\ldots}\ 4$

per cui $v_C(t) = 4 e^{-\omega_0 (t-T)}$ per $t > T$

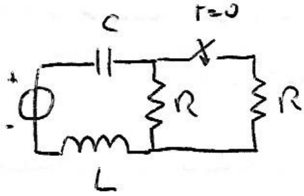
ripo di scrivere da preferenza

In conclusione

$$v_C(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 4 - 4e^{-\omega_0 t} & 0 \le t \le T \\ 4e^{-\omega_0 (t-T)} & t \ge T \end{cases}$$

REGIME SINUSOIDALE

Aula virtuale 22. Regime sinusoidale $\qquad i_L = ?$



$e(t) = 160 \cos(500t)\ V$

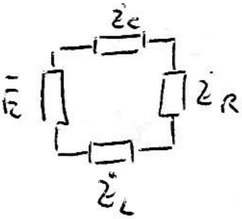
$R = 8\ \Omega$

$C = 2\ mF$

$L = 2\ mH$

$i_L(t)\ \forall t$
da determinare

1. $t<0$ rete a regime sinusoidale $\to$ FASORI



$\bar{E} = 160$ (coseno riferimento di fase)
$\Rightarrow$ fasore con seno $= -a j \Rightarrow$ $a \cdot sen(500t)$ nel tempo

$\dot{Z}_R = 8$

$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \qquad \frac{1}{j \cdot 500 \cdot \frac{2}{1000}}$

$\dot{Z}_L = j\omega L = j \qquad j \cdot 500 \cdot \frac{2}{1000}$

Dobbiamo stabilire $\bar{I}_L$ che è l'unica corrente circolante.

C e L sono in serie
quindi c'è una risonanza serie ed essi si comportano come un corto circuito

$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{eq}}$, in cui $\dot{Z}_{eq}$ è l'impedenza equivalente del circuito, che è $\dot{Z}_R$ in quanto $\dot{Z}_C$ e $\dot{Z}_L$ sono in risonanza.

$\bar{I}_L = \frac{160}{8} = 20$ fasore $\Rightarrow i_L(t) = 20\cos(500t)$ nel tempo

Inoltre:

$\bar{V}_C = \bar{I}_L \dot{Z}_C = 20 \cdot -j = -20 \Rightarrow v_C(t) = 20\, sen(500t)$ nel tempo

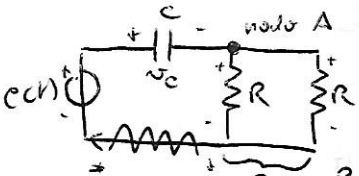
$\bar{I}_C'' = \bar{I}_R$

2. Condizioni iniziali, ovvero le variabili di stato nell'istante di commutazione:

$i_L(0) = 20 \quad e \quad v_C(0) = 0$

3. Determinare l'eq. differenziale che regola l'andamento della variabile di stato dopo l'istante di commutazione

$t>0$ evoluzione dinamica della rete



Si sostituisce il parallelo di R con $R_{eq} = \frac{1}{2}R$

$R_{eq} = \frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{R^2}{2R} = \frac{1}{2}R$

schema parallelo

LKT alla unica maglia) $v_C + v_{R_{eq}} + v_L = e$

$\left(v = iR \right.$, ovvero $v_{eq} = i R_{eq}$, $i = i_C = i_L$

$\left. v_{R_{eq}} = i_L \frac{R}{2} \right)$

Inoltre $i_L = i_C = C\frac{dv_C}{dt}$, quindi

$$v_C + i_L \frac{R}{2} + L\frac{di_L}{dt} = e \text{, per cui}$$

$$v_C + \frac{CR}{2}\frac{dv_C}{dt} + LC\frac{d^2 v_C}{dt^2} = e$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{2L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C = \frac{e}{LC} \quad (\text{in } v_C)$$

In funzione di i_L dobbiamo ricavare v_C dalla LKT: $v_C = e - i_L\frac{R}{2} - L\frac{di_L}{dt}$

e sostituendo v_C in $i_L = C\frac{dv_C}{dt}$, ovvero

$$i_L = C \cdot \frac{d}{dt}\left(e - i_L\frac{R}{2} - L\frac{di_L}{dt}\right)$$

$$i_L = C\left[\frac{d\,e(t)}{dt} - \frac{R}{2}\frac{d i_L}{dt} - L\frac{d^2 i_L}{dt^2}\right]$$

$$\frac{i_L}{C} = \frac{d\,e(t)}{dt} - \frac{R}{2}\frac{d i_L}{dt} - L\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$L\frac{d^2 i_L}{dt} + \frac{R}{2}\frac{d i_L}{dt} + \frac{i_L}{C} = \frac{d\,e(t)}{dt}$$ ovvero

$$\boxed{\frac{d^2 i_L}{dt} + \frac{R}{2L}\frac{d i_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{1}{L}\frac{d\,e(t)}{dt}}$$

4) Omogenea associata $i_{L0}(t)$

$$\frac{R}{2L} = \frac{8}{2\cdot\frac{2}{1000}} = 2000$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{\frac{2}{1000}\cdot\frac{2}{1000}} = 250000$$

$$\lambda^2 + \frac{R}{2L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2000 \pm \sqrt{2000^2 - 4\cdot 250000}}{2} =$$

$$= \frac{-2000 \pm 1732}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1866 \\ \lambda_2 = -134 \end{cases}$$

Quindi

$$i_{L0}(t) = K_1 e^{-1866t} + K_2 e^{-134t}$$

5) Soluzione particolare, in regime sinusoidale, quindi matematicamente dovremmo risolvere una equazione di tipo

$$i_{cp}(t) = A\cos(5\omega t) + B\sin(5\omega t)$$

e fare di calcoli, da cui $A = 0$ e $B = 40$

quindi $i_{cp}(t) = 40\cos(5\omega t)$

Oppure calcolare I_{LP} come fasore, ed esso è

$$\bar{I}_{cp} = \frac{\bar{E}}{\frac{\dot{Z}_R}{2} + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C} = 40$$

e, nel tempo, è

$$i_{cp} = 40\cos(5\omega t)$$

6) Trovare la seconda condizione iniziale, $\frac{di_L(0^+)}{dt} = ?$

Dalla LKT abbiamo $v_C + \frac{R}{2} i_L + L \frac{di_L}{dt} = e(t)$,

quindi $\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} e(t) - \frac{R}{2L} i_L - \frac{v_C}{L}$ e quindi

$$\frac{d i_L(0^+)}{dt} = \frac{e(0)}{L} - \frac{R}{2L} i_L(0^+) - \frac{v_C(0^+)}{L} = 4000 \text{ A/s}$$

7) Soluzione complessiva $i_L(t) = i_{L0}(t) + i_{Lp}(t)$

$$i_L(t) = K_1 e^{-1866t} + K_2 e^{-134t} + 40 \cos(500t)$$

8) Imporre la condizione iniziale per determinare K_1 e K_2

$i_L(0) = 40$

$\frac{d i_L(0^+)}{dt} = 4000$

$K_1 = \cancel{13,08}$ 10

$K_2 = \cancel{-6,81}$ -30

ns.

$\frac{d i_L}{dt} =$

$-1866 K_1 e^{-1866t}$

$-134 K_2 e^{-134t}$

$-40 \sin(500t) +$

$2000 \cos(500t)$

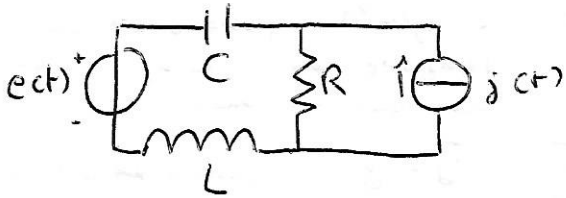
e quindi abbiamo

$$i_L(t) = \begin{cases} 40 \cos(500t) \text{ A} & t < 0 \\ 10 e^{-1866t} - 30 e^{-134t} + 40 \cos(500t) \end{cases}$$

Aula virtuale 26. Prova del 8.05.2013
Esercizio 2

Potenza
R

Determinare la potenza istantanea assorbita dal resistore R e quella erogata dal generatore di corrente j(t)



$e(t) = 80\cos(\underline{500t})\ V$

$j(t) = 8\ \text{sen}(\underline{1000}t)\ A$

non isofrequenziali

$R = 2\ \Omega$

$L = 4\ mH$

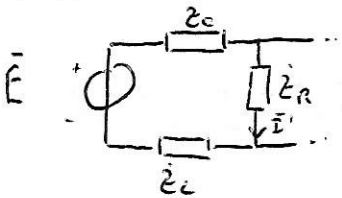
$C = 1\ mF$

GENERATORI NON ISOFREQUENZIALI

=> DEVE ESSERE USATO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

I FASORI NON POSSONO ESSERE SOMMATI, POSSONO ESSERE SOMMATE SOLO LE GRANDEZZE NEL TEMPO

Primo sottocircuito, è spento j(t), sostituito da un circuito aperto



$\bar{E} = 80$

$\dot{Z}_R = 2$

$$\begin{cases} \dot{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{1}{j \cdot 500 \cdot \frac{1}{1000}} = -2j \\ \dot{Z}_L = j\omega L = j \cdot 500 \cdot 4 \cdot \dfrac{1}{1000} = 2j \end{cases}$$

C e L sono in serie, con R, siamo in presenza di una risonanza serie => C e L si comportano come un corto circuito.

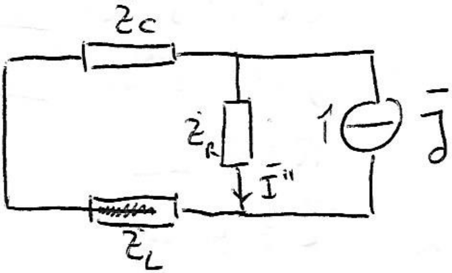
L'impedenza equivalente del circuito è $\dot{Z}_R$, quindi la corrente $\bar{I}$ che circola è, in questo sottocircuito

$$\bar{I}' = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_R} = 40 \qquad \text{(fasore)}$$

Calcoliamo la grandezza nel tempo:

$$\bar{I}' = 40 \longleftrightarrow i'(t) = 40\cos(500t)$$

Secondo sottocircuito



è spento il generatore di tensione che si comporta come un corto circuito.

$\bar J = 8$ seno è il rif.to di fase

$\dot Z_R = 2$

$\left.\begin{array}{l}\dot Z_C = -j \\ \dot Z_L = 4j\end{array}\right\}$ Ricalcolo alla nuova pulsazione

$\left.\begin{array}{l}\dot Z_R \text{ è in parallelo a } \bar J \\ \dot Z_C \text{ e } \dot Z_L \text{ sono in serie}\end{array}\right\} \Rightarrow$ per calcolare $\bar I''$ occorre un partitore di corrente

PARTITORE DI CORRENTE FRA $\dot Z_R$ E LA SERIE $\dot Z_C + \dot Z_L$, CON $\bar I''$, CORRENTE IN $\dot Z_R$, DA CALCOLARE*:

$$\bar I'' = \bar J \cdot \frac{\dot Z_C + \dot Z_L}{\dot Z_C + \dot Z_L + \dot Z_R} \simeq 5,54 + 3,63j$$

Calcoliamo la grandezza nel tempo

$$\bar I'' = 5,54 + 3,63j \longleftrightarrow i''(t) = \underbrace{6,66}_{\sqrt{5,54^2+3,63^2}} \text{sen}(1000t + \underbrace{0,58}_{\text{arctan}\left(\frac{3,63}{5,54}\right) \text{ rad.}})$$

Quindi, per la sovrapposizione:

$$i(t) = i'(t) + i''(t) = 40\cos(500t) + 6,66\,\text{sen}(1000t + 0,58)$$

corrente totale

---

* non è $\boxed{\overset{\text{NO!}}{\bar I'' = \frac{\dot Z_C + \dot Z_L}{\dot Z_{eq}} \bar J}}$! è $\bar V_J = \dot Z_{eq} \cdot \bar J$!!!

../..

Conoscendo $i(t)$ si può calcolare la tensione ai capi del resistore R:

$$v_R(t) = v_j(t) = R\, i(t) =$$

$$= 80 \cos(500t) + 12{,}32 \operatorname{sen}(1000t + 0{,}53)$$

La potenza istantanea assorbita dal resistore R:

$$p_R(t) = R \cdot i^2(t) = \ldots$$

La potenza istantanea erogata dal generatore $j(t)$:

$$p_j(t) = v_j(t)\, j(t) = \ldots$$

Potenza media assorbita da R: è il valor medio della potenza istantanea

$$P_{media\,R} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{istantanea\,R}\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T R\, i_R^2\, dt$$

in cui T è il periodo. Si prende quello più grande perché include quello più piccolo.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, si prende $\omega = 500 \Rightarrow T \simeq 12{,}6$ ms.

$\omega = 2\pi f$

--/--

L'integrale della grandezza sen^2 e cos^2 in un periodo T fa sempre $\frac{T}{2}$.

L'integrale del doppio prodotto fa zero perché è l'integrale in un periodo di una grandezza sinusoidale.

Quindi il calcolo sarà:

$$P_{media} = \frac{3200}{2} + \frac{38.72}{2}$$

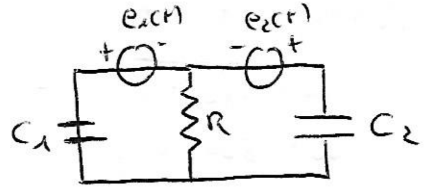
Osservazione: la potenza media in un circuito coincide con la potenza attiva.
Il primo integrale è la p. attiva nel primo circuito; l'ultimo è la p. attiva nel secondo.
Questo è un caso in cui sommare le potenze attive dei sottocircuiti ha senso, e tale somma è la potenza media

Aula virtuale 26. Prova del 10 Maggio 2013

Potenza R e generatore tensione

ESERCIZIO 2

DETERMINARE LA POTENZA ISTANTANEA ASSORBITA DAL RESISTORE R E QUELLA EROGATA DAL GENERATORE DI TENSIONE $e_1(t)$



$$e_1(t) = 40 \cos(500t)\ V$$

$$e_2(t) = 80 \,\mathrm{sen}(250t)\ V$$

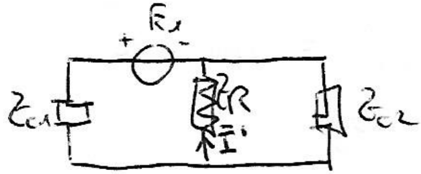
$$R = 2\ \Omega$$

$$C_1 = 2\ mF$$

$$C_2 = 1\ mF$$

I due generatori sono non isofrequenziali, quindi deve essere obbligatoriamente usato il metodo di sovrapposizione degli effetti, con i fasori.

Primo sottocircuito (e_2 spento, sostituito con un c.c.)



$\bar{E}_1 = 40$ coseno come fase di riferimento

$$\dot{Z}_R = 2$$

$$\dot{Z}_{C1} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j500 \cdot \frac{2}{1000}} = -j$$

$$\dot{Z}_{C2} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j500 \cdot \frac{1}{1000}} = -2j$$

Partitore di tensione, nel parallelo Z_R e Z_{C2} che è in serie a Z_{C1}

La tensione nel parallelo Z_R e Z_{C2} è data da

$$V'_{//} = \bar{E}_1 \cdot \frac{Z_R // Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_R // Z_{C2}} = 24 + 8i$$

Quindi la d.d.p. in Z_R e in Z_{C2} è $24+8i$, allora la corrente che scorre in Z_R, la corrente $\bar{I}'$ è

../..

$$\bar{I}' = \frac{V'_{\parallel}}{R} = 12 + 4j$$

$V'_{\parallel}$ -> indica la tensione del parallelo: i due bipoli hanno la stessa tensione ai capi, ma correnti diverse.

Passando al dominio nel tempo

$$\bar{I}' = 12 + 4j \longleftrightarrow i'(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

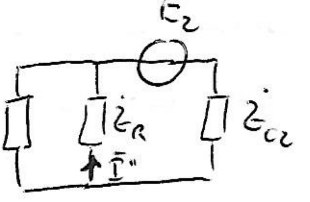
con $A = \sqrt{12^2 + 4^2} = 12{,}64$

$\omega = 50$ rad/s

$\varphi = \arctan \frac{4}{12} = \arctan \frac{1}{3} = 0{,}32$

$$i'(t) = 12{,}6 \cos(50t + 0{,}32)$$

Secondo sottocircuito: e_1 spento, e_2 acceso.



Considerando il coseno come riferimento di fase il fasore $\bar{E}_2$ sarà $-80j$

$\bar{E}_2 = -80j$

$Z_R = 2$

$Z_{C1} = -\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{100}} = -2j$

$Z_{C2} = -\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{100}} = -4j$

Per determinare $\bar{I}_{\parallel}$ si applica un partitore al parallelo tra Z_{C1} e Z_R che è in serie a Z_{C2}.

$$\bar{V}''_{\parallel} = \bar{E}_2 \cdot \frac{Z_{C1} \parallel Z_R}{Z_{C1} \parallel Z_R + Z_{C2}} = -80j \, \frac{1-j}{1-j-4j} =$$

$$= 12{,}30 - 18{,}46j$$

../..

Quindi

$$\bar{I}'' = \frac{\bar{V}''}{\dot{Z}_R} = 6,15 - 8,23j$$ e passando nel tempo

$\bar{I}'' = 6,15 - 8,23j \longleftrightarrow i''(t) = 11,1 \cos(25\omega t - 0,98)$

GENERATORI NON ISOFREQUENZIALI: NON SOMMARE MAI I FASORI, MA SOMMARE SOLO LE GRANDEZZE NEL TEMPO.

Quindi $i(t) = i'(t) + i''(t) =$

$12,6 \cos(5\omega t + 0.32) + 11,1 \cos(25\omega t - 0.98)$

La potenza istantanea assorbita dal resistore R è:

$P_R(t) = R \cdot i^2(t) = \ldots$ potenza istantanea

La potenza istantanea erogata dal generatore $e_1(t)$ è:

$Pe_1(t) = e_1(t) \cdot i(t) = 40 \cos(5\omega t) + \ldots = \ldots$

$p = v \cdot i$

Potenze con generatori non isofrequenziali

In generale, se ci sono generatori non isofrequenziali:

- Non è definita la potenza complessa totale, la potenza attiva totale, la potenza reattiva totale, solo potenza istantanea

- Non ha senso calcolare le potenze complesse o reattive nei singoli circuiti e poi sommarle.

  ha senso calcolare le potenze attive nei singoli sottocircuiti e poi sommarle solo perché, essendo relative a circuiti non isofrequenziali, la somma coincide con la potenza media.

- La potenza istantanea e la potenza media sono sempre e comunque definite e calcolabili.

Aula virtuale 27.

Ultimo esercizio.

Se il forzamento è la somma di due sinusoidi, ad es.

$$e(t) = 72\cos(100t) + 60\,\mathrm{sen}(200t)$$

Tipo di forzamento

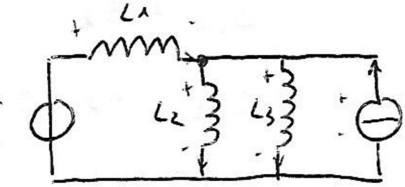
allora si deve applicare la sovrapposizione degli effetti:

$e'(t) = 72\cos(100t)$	$e''(t) = 60\,\mathrm{sen}(200t)$
Resistori, induttori e condensatori vari	Resistori, induttori e condensatori ani

Le grandezze vengono calcolate con i fasori, ma non possono essere sommate. La somma deve essere fatta con le grandezze nel dominio del tempo.

Aula Virtuale 28. Prova del 18 Luglio 2012 Potenza generatore

Definire la potenza attiva erogata dal generatore di tensione.



$e(t) = 81 \cos(1000t)\,V$

$j(t) = 18 \text{ sen}(1000t)\,A$

$L_1 = 3\ mH$

$L_2 = 4\ mH$

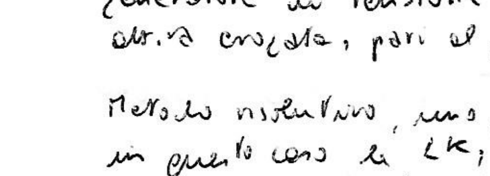
$L_3 = 6\ mH$

Osservazione: gli induttori non assorbono potenza attiva, ma un generatore può erogare potenza attiva che viene assorbita completamente dall'altro generatore. Quindi non è detto che il risultato sia zero.

Step: occorre calcolare la corrente che attraversa il generatore di tensione per poter calcolare la potenza attiva erogata, pari al prodotto fra tensione e tale corrente.

Metodo risolutivo, uno qualunque di quelli proposti, in questo caso la LK, dopo essere passati al dominio dei fasori, essendo in regime sinusoidale.

Il parallelo L_2 e L_3 è sostituito dall'equivalente $\dot{Z}_{L2//L3}$, considerando la corrente che attraversa il parallelo e quindi togliendo una maglia:



Fasori, con riferimento per il seno:

$\bar{E} = 81j$

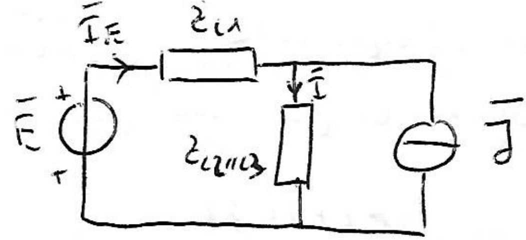
$\bar{J} = 18$

$\dot{Z}_{L1} = 3j$

$\dot{Z}_{L2} = 4j$

$\dot{Z}_{L3} = 6j$

1 11/..



$\bar{E} = 81j$

$\bar{J} = 18$

$\dot{Z}_{L1} = 3j$

$\dot{Z}_{L2} = 4j$

$\dot{Z}_{L3} = 6j$

LKT maglia a sx:

$$\bar{E} - \underbrace{\dot{Z}_{L1}\bar{I}_E}_{\bar{V}_{L1} = V_E} - \underbrace{\dot{Z}_{L2//L3}\bar{I}}_{\bar{V}_{L2//L3}} = 0$$

LKC all'unico nodo:

$\bar{I}_E + \bar{J} - \bar{I} = 0$, con I_E da ricavare.

Ricavando $\bar{I} = I_E + \bar{J}$ dalla LKC e sostituendo nella LKT, abbiamo

$$\bar{E} - \dot{Z}_{L1}\bar{I}_E - \dot{Z}_{L2//L3}(\bar{I}_E + \bar{J}) = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\bar{E} - \underbrace{\dot{Z}_{L1}\bar{I}_E - I_E \cdot \dot{Z}_{L2//L3}}_{-I_E(\dot{Z}_{L1} + \dot{Z}_{L2//L3})} - \bar{J} \cdot \dot{Z}_{L1//L2} = 0 \text{ e quindi}$$

$$\bar{I}_E = \frac{1}{\dot{Z}_{L1} + \dot{Z}_{L2//L3}}\left(\bar{E} - \dot{Z}_{L2//L3}\bar{J}\right)$$

Dobbiamo calcolare $\dot{Z}_{L2//L3} = \dfrac{\dot{Z}_{L2} \cdot \dot{Z}_{L3}}{\dot{Z}_{L2} + \dot{Z}_{L3}} = 2,4j$

Quindi

$$\bar{I}_E = \frac{81j - 2,4j}{3j + 2,4j} = 14,5$$ (7 a [illegible])

$\bar{I}_E^* = 14,5$ coniugato di $\bar{I}_E$.

La potenza attiva è $P_E = \frac{1}{2} Re\left\{ \bar{V}\bar{I}^* \right\} =$

$$= \frac{1}{2} Re\left\{ \bar{E}\bar{I}_E^* \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left\{ 81j \; 14,5 \right\} = \frac{1}{2} Re\left\{ 1174,5j \right\}$$

$= 0$, perché la parte reale è nulla.

Quindi la potenza attiva erogata dal generatore risulta nulla.
Ciò è dovuto sia all'assenza di resistori nella rete, sia ai particolari valori di e(t) e j(t).

La potenza attiva erogata dal generatore di tensione risulta nulla, perchè puramente immaginaria, abbiamo solo potenza reattiva assorbita in parte dai 3 induttori e in parte anche dal generatore di corrente.
Da questo risultato possiamo dire due cose:

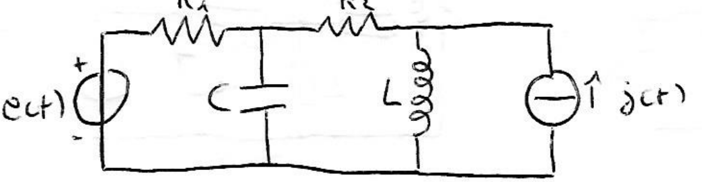
1. la potenza attiva è certamente nulla

2. Possiamo dire anche che il generatore di corrente non eroga potenza attiva perchè se non la eroga il generatore di tensione non la assorbono i 3 induttori e anche il generatore di corrente non potrà erogare potenza attiva.

Aula Virtuale 28. Prova del 13.07.2012
ESERCIZIO 2

Potenza attiva erogata dal generatore di tensione

DETERMINARE LA POTENZA ATTIVA EROGATA DAL GENERATORE DI TENSIONE



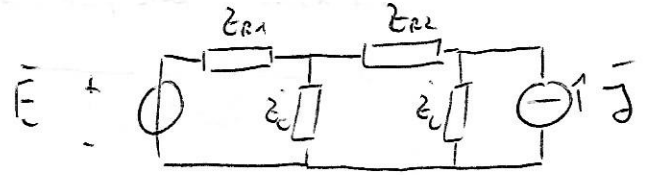
$e(t) = 50 \cos(500t)$ V $\qquad j(t) = 10 \operatorname{sen}(500t)$ A

$R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$

$L = 8$ mH ; $C = \frac{1}{2}$ mF

$e(t)$ e $j(t)$ sono isofrequenziali

- Passaggio ai fasori e alle impedenze



Prendendo il seno come riferimento fase, allora

$\bar{E} = 50j \qquad \dot{Z}_{R1} = 4 \quad \dot{Z}_{R2} = 4$

$\bar{J} = 10 \qquad \dot{Z}_L = j\omega L = 4j$

$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -4j$

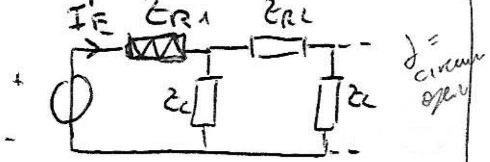
non c'è nessuna risonanza, né serie, né parallelo.

Risolviamo la rete con uno dei metodi conosciuti, per conoscere $\bar{I}_E$. Optiamo per il metodo di sovrapposizione degli

--/--

effetti. $\bar{I}_E = \bar{I}'_E + \bar{I}''_E$

Primo sottocircuito
e spento $\bar{J}$



Si calcola l'impedenza equivalente del circuito Z_{eq}, data dalla serie $Z_{R2}+Z_L$ che è in parallelo a Z_C e tutto questo in serie a Z_{R1}, quindi

$$Z_{eq} = ((\underbrace{Z_L + Z_{R2}}_{4j+4}) // \underbrace{Z_C}_{-4j}) + \underbrace{Z_{R1}}_{4} =$$

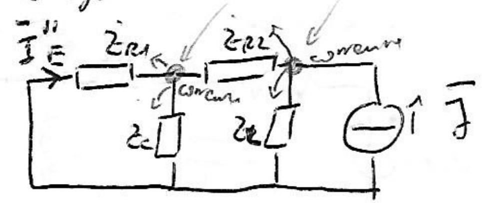
$$\frac{(4j+4)\cdot -4j}{4} + 4$$

$= 8 - 4j$ (calcolatrice)

Dunque

$$\bar{I}'_E = \frac{\bar E}{Z_{eq}} = -2,5 + 5j \checkmark$$

Secondo sottocircuito
e spento $\bar E$



Osservazioni: la corrente $\bar J$ si ripartisce in Z_L e nelle altre impedenze.
Quindi occorre fare un partitore di corrente al nodo A, fra la corrente che fluisce in L e la corrente che fluisce in R_2 e parte rimanente.
La corrente che si ripartisce nel nodo A, che fluisce in R_2 è

$$\bar J \cdot \frac{Z_L}{Z_L + Z_{R2} + Z_C // Z_{R1}}$$

La corrente sopra si ripartisce in C e in R_1, quella in R_1 cambiata di segno è quella che ci interessa, ovvero la corrente $\bar I''_E$.
Quindi, applicando un partitore di corrente abbiamo

$$\bar I''_E = -\bar J \frac{Z_L}{Z_L + Z_{R2} + Z_C // Z_{R1}} \cdot \frac{Z_C}{Z_{R1} + Z_C}$$

$= -4 - 2j$ (preso per buono)

Quindi $\bar{I}_E = \bar{I}'_E + \bar{I}''_E = -6.5 + 3j$.

La potenza complessa $\dot{P}_E$ è data da:

$$\dot{P}_E = \frac{1}{2}\,\bar{E}\cdot\bar{I}_E^* = \left[\frac{1}{2}\cdot 50j\cdot \underbrace{(-6.5 - 3j)}_{\bar{I}^*}\right] =$$

$$= 75 - 162{,}5\,j$$

Quindi la potenza attiva P_E ne è la parte reale, ovvero

$P_E = +75\,W$, essa è positiva quindi il generatore eroga potenza attiva.

Se $P_E < 0$, la potenza attiva è negativa, allora il generatore assorbe potenza attiva.

ATTENZIONE: USANDO LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI SI DEVONO TROVARE PRIMA LE CORRENTI E LE TENSIONI TOTALI E POI SI POSSONO CALCOLARE LE POTENZE. NON HA SENSO CALCOLARE LE POTENZE COMPLESSE NEI SINGOLI SOTTOCIRCUITI.

IN PRATICA NON VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DELLE POTENZE

INOLTRE SE I GENERATORI SONO NON ISOFREQUENZIALI LE SOMME SI POSSONO FARE SOLO NEL DOMINIO NEL TEMPO, IN QUESTO CASO IL METODO DI RISOLUZIONE DELLA RETE È OBBLIGATORIAMENTE QUELLO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

Step.

Per determinare la potenza attiva occorre calcolare la corrente nel generatore di tensione, farne il coniugato, poi moltiplicarla per la tensione e prendere la parte reale:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \overline{V} \underline{I}^{*} \right\}$$ n.b.: si usano i fasori

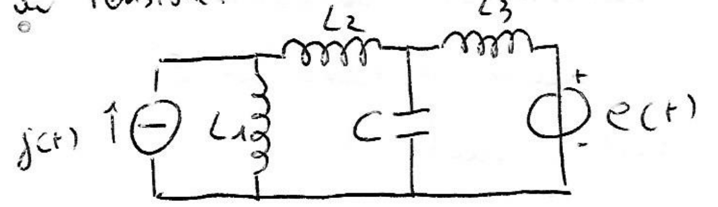
La corrente nel generatore deve essere calcolata con uno dei metodi conosciuti, ad es. metodo di sovrapposizione effetti.

Aula Virtuale 28 Prova del 20.07.2022

Esercizio 2

Potenza attiva erogata da generatore di tensione

Determinare la potenza attiva erogata dal generatore di tensione.



$e(t) = 40\cos(1000t)\,V$

$j(t) = 10\,\text{sen}(1000t)\,A$

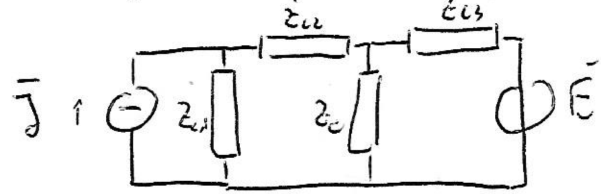
$L_1 = 1\,mH$

$L_2 = 1\,mH$

$L_3 = 1\,mH$

$C = 1\,mF$

Passaggio ai fasori



Usando come riferimento di fase il seno

$\bar{E} = 40j$

$\bar{J} = 10$

$\dot{Z}_{L1} = j \quad \dot{Z}_{L2} = j \quad \dot{Z}_{L3} = j$

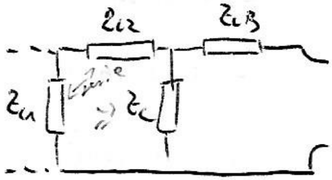
$Z_C = -j$

In linea di principio non c'è risonanza, ma a seconda del metodo usato per la risoluzione delle reti ci può essere: con le LK no, con Norton sì, sovrapposizione degli effetti sì.

Risoluzione con Norton; circuito escluso ramo con $\bar{E}$.

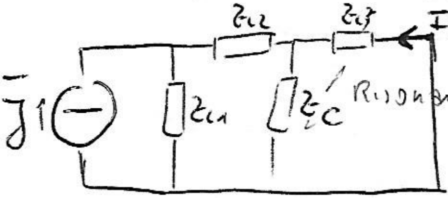
Da determinare l'impedenza equivalente, quando $\bar{J}$ è spento e da determinare la corrente di corto circuito $\bar{I}_{cc}$ quando il ramo con $\bar{E}$ è sostituito da un corto circuito.

Impedenza equivalente:

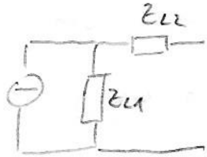


$$\dot{Z}_{eq} = \underbrace{\underbrace{(\underbrace{\dot{Z}_{c1} + \dot{Z}_{c2}}_{serie}) // \dot{Z}_c}_{//} + \dot{Z}_{c3}}_{serie} = -j$$

Corrente di cortocircuito $\bar{I}_{cc}$



$\Rightarrow \bar{J}$

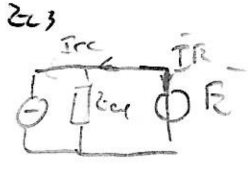


Tutta la corrente $\bar{J}$ passa per $\dot{Z}_{c1}$ quindi la tensione ai capi di $\dot{Z}_{c1}$ vale $\bar{J}\,\dot{Z}_{c1}$.

In $\dot{Z}_{c2}$ non passa corrente $\Rightarrow$ tutta la corrente fluisce in $\dot{Z}_{c1}$ $\Rightarrow$ tensione ai capi di $\dot{Z}_{c1}$ = tensione ai capi di $\dot{Z}_c$ = tensione ai capi di $\dot{Z}_{c3}$ e vale $\bar{J} \cdot \dot{Z}_{c1}$ $\Rightarrow$ la corrente $I_{cc} = -\bar{J}\,\frac{\dot{Z}_{c1}}{\dot{Z}_{c3}}$

$$\bar{I}_{cc} = -\bar{J}\,\frac{\dot{Z}_{c1}}{\dot{Z}_{c3}} = -10 \Rightarrow$$

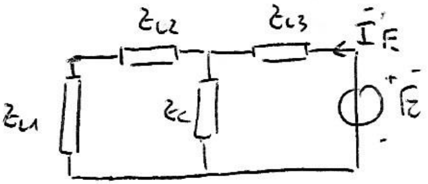
$\bar{I}_R = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{eq}} - \bar{I}_{cc} = -50$



Metodo di sovrapposizione degli effetti:

Primo sottocircuito

$\bar J$ sostituito da un c.c.



Impedenza equivalente ai capi di $\bar E$:

$$\dot Z_{eq} = ((\dot Z_{L1} + \dot Z_{L2}) // \dot Z_C) + \dot Z_{L3}$$

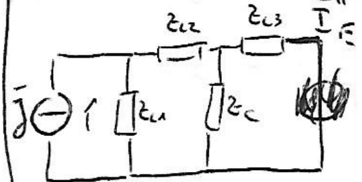
quindi

$$\bar I'_E = \frac{\bar E}{\dot Z_{eq}} = -40$$

$i'_E(t) = -40 \sin(\omega t)$

Secondo sottocircuito

$\bar E$ sostituito da un cortocircuito



si sfrutta la risonanza //

A causa della risonanza //, $Z_C // Z_{L3}$ è un c.a., quindi in Z_{L2} non passa corrente, come nel parallelo. Si osserva che la tensione di Z_{L1} è pari a $\bar J \dot Z_{L1}$:

$$\boxed{\bar V_{Z_{L1}} = \bar J \dot Z_{L1}}$$

La caduta di tensione su Z_{L2} è nulla quindi la caduta di tensione ai capi di Z_{L1} = quella di Z_C = Z_{L3}; cioè $\bar V_{Z_C} = \bar V_{Z_{L3}} = \bar V_{Z_{L1}}$.

$$\boxed{\bar V_{Z_{L3}} = \dot Z_{L3} \cdot \bar I''_E} \Rightarrow \bar J \dot Z_{L1} = \dot Z_{L3} \bar I''_E$$

$$\bar I''_E = -\bar J \frac{\dot Z_{L1}}{\dot Z_{L3}} = -10$$

$$\bar I_E = \bar I'_E + \bar I''_E = -50$$

Dunque, poiché $\bar I_E = -50$ possiamo calcolare la potenza complessa P_E.

$$\dot{P}_{R} = \frac{1}{2}\,\bar{E}\,\bar{I}^{*}_{R}$$

con $\bar{E} = 40j$

$$\bar{I}^{*}_{R} = -50$$

Quindi:

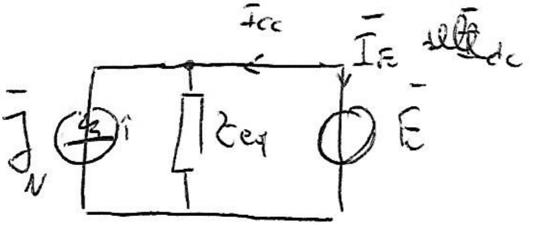
$$\dot{P}_{R} = -1000j$$

Per cui la potenza attiva, che è la parte reale di $\dot{P}_{R}$, è nulla.

La potenza attiva erogata dal generatore è nulla e questo è dovuto sia all'assenza di resistori nella rete, sia ai particolari valori di $e(t)$ e $j(t)$.

Provare con $j(t) = 10 \cos(100t)$ A.

CIRCUITO equivalente di NORTON



$$\bar{I}_E = \underbrace{\frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{eq}} - \bar{I}_{cc}}_{\text{applicazione sovrapposizione al circuito semplificato}}$$

$J_N = I_{cc}$

sottocircuito 1, $\bar{E}$ spento

$I'_E = -I_{cc}$

sottocircuito 2, $\bar{J}_N$ spento

$I''_E = \frac{\bar{E}}{Z_{eq}}$

$$\bar{I}_E = I'_E + I''_E = \frac{\bar{E}}{Z_{eq}} - I_{cc}$$

1° ordine

L'equazione differenziale è del tipo:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot i_L = \left[\frac{E}{L}\right]^{\text{dimensione}}$$

con $\frac{1}{\tau} = \frac{R_{eq}}{L}$, ove $\tau = \frac{L}{R_{eq}}$

CIRCUITO RL

ed è del tipo

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot v_C = \left[\frac{E}{R}\right]$$

con $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_{eq} \cdot C}$, ove $\tau = R_{eq} \cdot C$

CIRCUITO RC

2° ORDINE

In sostanza, all'analisi del circuito in regime stazionario, con due bipoli dinamici, L e C, si hanno due equazioni: una LKC per il condensatore ($i_C = C\frac{dv_C}{dt}$), e una LKT per l'induttore ($v_L = L\frac{di_L}{dt}$) - con altre equazioni del sistema (una LKC che includa i_L) o una LKT che includa v_C) si ottiene, per sostituzione, una equazione differenziale del 2° ordine in i_L o in v_C, tipo

concordi + ⇒ dà parte reale negativa!

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC}\right)\frac{di_L}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right) i_L = \left(\frac{e(t)}{LRC}\right) \qquad \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dv_C}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right) v_C = \left(\frac{e(t)}{LC}\right)$$

coeff., varia a seconda delle ipotesi

coeff.

Forzamento, [tensione]

Forzamento, [corrente]

Circuiti del secondo ordine in evoluzione dinamica

Schema logico - promemoria

1. ** Analizzare la rete prima dell'istante di commutazione (se necessario)
2. Determinare le variabili di stato* nell'istante di commutazione
3. Determinare l'equazione differenziale che regola il comportamento della variabile d'interesse dopo l'istante di commutazione
4. Risolvere l'omogenea associata
5. Determinare l'integrale particolare
6. Trovare la seconda condizione iniziale (dalla rete per t > 0) per la variabile di interesse
7. Sommare la soluzione omogenea e l'integrale particolare per determinare la soluzione complessiva
8. Imporre le condizioni iniziali nella soluzione complessiva per determinare le costanti d'integrazione

n.b.: questo schema logico vale anche per i circuiti del primo ordine in evoluzione dinamica. La differenza è che per questi, al punto 2, abbiamo una sola variabile di stato: i_L, la corrente che attraversa l'induttore o v_C, la differenza di potenziale ai capi del conduttore; il punto 6 non c'è in quanto c'è una la variabile di stato.

vd. Aula Virtuale 23, slide 3 per relativo schema logico.

Prof. Dario Assante
Facoltà di Ingegneria
d.assante@uninettunouniversity.net

* v_C o i_L, in funzione del tempo.

** vd Regime stazionario L = e C =)

e Regime sinusoidale (Fasori)